

Quadratischen Gleichungen

Gero Kriependorf

Version: 1.0

10.November 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Formen von Quadratischen Gleichungen	2
2	Scheitelpunkt	2
2.1	Lösungsformel	2
2.2	Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung	2
3	Nullstellen	3
3.1	Nullstellen durch Wurzelziehen	3
3.2	Nullstellen mit der pq-Formel	3
3.3	Nullstellen mit der abc-Formel	4
4	Aufstellung des Funktionsterms	4
4.1	Mit dem Scheitelpunkt und einem weiteren Punkt	4
4.2	Mit den Nullstellen und einem Punkt	4
4.3	Mit drei gegebenen Punkten \implies Gaußsches Eliminationsverfahren . . .	5
5	Verschiebung einer Parabel	5
5.1	In x-Richtung	5
5.2	In y-Richtung	6
5.3	Strecken	6
5.4	An der x-Achse spiegeln	6

1 Formen von Quadratischen Gleichungen

allgemeine Form: $ax^2 + bx + c$

Faktorform: $a(x - x_1)(x - x_2)$

Scheitel-Punkt-Form: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$

a = Streckungsfaktor

2 Scheitelpunkt

2.1 Lösungsformel

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \mid f(x)\right)$$
$$S_x = -\frac{b}{2a}$$
$$S_y = c - \frac{b^2}{4a}$$

2.2 Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x) + 2$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{2} + 2$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2,5$$

$$S(-1 \mid 2,5)$$

3 Nullstellen

3.1 Nullstellen durch Wurzelziehen

Nullstellen ermitteln durch Wurzelziehen in der Scheitel-Punkt-Form (der Streckungsfaktor a ist irrelevant da $a \cdot 0 = 0$):

$$f(x) = (x + 3)^2 - 1$$

$$0 = (x + 3)^2 - 1$$

$$1 = (x + 3)^2$$

$$1 = \pm(x + 3)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 3$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -2$$

3.2 Nullstellen mit der pq-Formel

Herleitung:

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= 0 \\x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \mathbb{D} &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\end{aligned}$$

3.3 Nullstellen mit der abc-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

alternative Darstellung:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

4 Aufstellung des Funktionsterms

4.1 Mit dem Scheitelpunkt und einem weiteren Punkt

Scheitelpunkt: $S(x_s|y_s)$

Punkt: $P(x_p|y_p)$

Scheitelpunktform:

$$y_p = a(x_p - x_s)^2 + y_s$$

4.2 Mit den Nullstellen und einem Punkt

$N_1(x_1|0)$ $N_2(x_2|0)$

$P(x_p|y_p)$

$$y_p = a(x_p - x_1)(x_p - x_2)$$

4.3 Mit drei gegebenen Punkten \implies Gaußsches Eliminationsverfahren

$$P(2|-4) \quad Q(-2|0) \quad R(1|-3)$$

$$\left| \begin{array}{l} 4a + 2b + c = -4 \\ 4a - 2b + c = 0 \quad | \cdot -1 \\ a + b + c = -3 \quad | \cdot -4 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} 4a + 2b + c = -4 \\ 0 + 4b + 0 = -4 \\ 0 - 2b - 3c = 8 \quad | \cdot -2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} 4a + 2b + c = -4 \\ 0 + 4b + 0 = -4 \\ 0 + 0 + 6c = -12 \end{array} \right|$$

$$6c = -12$$

$$c = -2$$

$$4b = -4$$

$$b = -1$$

$$4a + 2 \cdot -1 - 2 = -4$$

$$4a = 0$$

$$a = 0$$

$$p(x) = 0x^2 - x - 2$$

5 Verschiebung einer Parabel

$$f(x) = x^2$$

5.1 In x-Richtung

um +2 nach rechts

$$f_1(x) = (x - 2)^2$$

5.2 In y-Richtung

um 3 nach oben

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 3$$

5.3 Strecken

um Faktor $\frac{5}{2}$ strecken

$$f_3(x) = \frac{5}{2}(x - 2)^2 + 3$$

5.4 An der x-Achse spiegeln

$$f_4(x) = -\left(\frac{5}{2}(x - 2)^2 + 3\right)$$

$$f_4(x) = -\frac{5}{2}(x - 2)^2 - 3$$